単板コンデンサの誘電体の複素比誘電率の周波数依存性の抽出

石飛 徳昌 *

2017 年 7 月 11 日

概要

比誘電率が 10000 を超えるような誘電体を使った単板コンデンサの共振周波数を含む周波数範囲の複素インピーダンスの測定値から，誘電体の複素比誘電率の周波数依存性を抽出した．抽出に当たって重大な誤差要因となる寄生インダクタの影響を取り除く方法を考案した．テクダイヤ社からご提供いただいた実際の測定値を例に抽出を試み，抽出結果からさらにその近似式も求めた．抽出した複素比誘電率を Sonnet の電磁界解析モデルに再現した測定環境に適用し結果の妥当性を確認した．

目次

1 まえがき

1.1 従来の複素比誘電率抽出の問題点 [1]

コンデンサの複素インピーダンスから複素比誘電率を求める容量法は，概ね 1GHz までの連続的な周波数依存性を得られることと，多くの測定器に実装されて取り扱いが容易なため広く用いられている．その誤差要因として

要因 1： 誘電体厚さの測定誤差
要因 2： 電極端の漏れ電界
要因 3： 電極と誘電体の間の空隙
要因 4： 自己共振

が知られている．この中で特に最後の自己共振周波数付近の誤差は他の要因に比べて非常に大きな誤差を生じる可能性がある．本小論ではこの誤差要因を取り除く手法を考案する．

* 有限会社ソネット技研

表 1　測定した単板コンデンサの概要

		テクダイヤ社	
		SK00C500M10A6	
電極寸法	S	$(0.25 \pm 0.025)^2$	mm^2
電極間隔	d	0.15 ± 0.025	mm
静電容量	C	$50 \pm 20\%$	pF
比誘電率	ε_{r}	≈ 16000	
組成		$\mathrm{S_rT_iO_3}$ 系	

1.2　電磁界解析における複素比誘電率の周波数依存性の問題点

電磁界シミュレータ Sonnet では基板や誘電体ブリックの複素比誘電率を $\varepsilon_{\mathrm{r}}, \tan\delta$ で定義する．さらに複素比誘電率が周波数や温度への依存性を持っている場合はそれを任意の関数で定義する機能も用意されている．

ところが，しばしばその機能は無視され，一定の複素比誘電率が電磁界解析モデルに与えられたまま解析が行われる．この場合，複素比誘電率の周波数依存性によって大きな誤差が生じることがある．

そこで本小論では複素比誘電率の周波数依存性を電磁界シミュレータ Sonnet のユーザー定義関数に定義する方法も紹介する．

1.3　対象とする誘電体と単板コンデンサ

本小論で対象とする単板コンデンサは例えばテクダイヤ社の超高誘電率セラミック単板コンデンサのような比誘電率が十分大きな誘電体の対向する面に電極を形成した単板コンデンサである．表 1 に，一例として測定を行った単板コンデンサの寸法と比誘電率の概要を示す [2]．このような高誘電率の誘電体は周波数依存性をもっていることが予想されるので，[3] 広い周波数範囲を連続的に測定出来る容量法が適している．この単板コンデンサに関して 1.1 で説明した容量法の誤差要因について考えると

要因 1：　セラミックスの寸法は安定しているので“誘電体厚さの測定誤差”は管理しうる．

要因 2：　比誘電率が非常に大きいため“電極端の漏れ電界”の影響は非常に小さい．

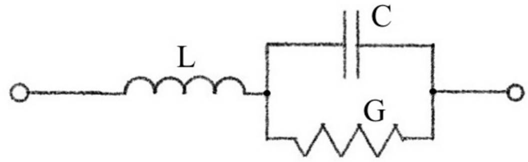

図 1　単板コンデンサの集中定数等価回路

要因 3：　電極はセラミックに密着して形成されるため“電極と誘電体の間の空隙”も生じない．

要因 4：　比誘電率が非常に大きいため自己共振周波数は低く，その周波数領域では大きな誤差を生じる

それゆえここで対象とする誘電体と単板コンデンサでは四番目の誤差要因が支配的であり，この対策が必要である．

2　回路論的考察

2.1　集中定数等価回路

単板コンデンサの集中定数等価回路を図 1 の様に見なす．この集中定数等価回路の複素インピーダンスと表 1 の構造寸法から誘電体の複素比誘電率を導出する．

2.2　重要な前提条件

単板コンデンサの寸法は誘電体中の実効波長の半分より小さく，誘電体中で電界は一様に分布しているとする．このことは，単板コンデンサの電極を面積 S の正方形，光速度を c_0 とすると

$$\frac{c_0}{2\sqrt{2\varepsilon_{\mathrm{r}} S}} \tag{1}$$

よりも低い周波数で成立する．

2.3　複素比誘電率と複素アドミタンス

C に使う誘電体の複素比誘電率を $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$ とする．

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}} = \varepsilon_{\mathrm{r}}' - \mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{r}}'' \tag{2}$$

誘電体中で電界は一様に分布しているとすると誘電体の $\tan\delta$ とコンデンサの D は等しいと考えうる．

$$D = \tan\delta \tag{3}$$

$$\frac{G}{\omega C} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}''}{\varepsilon_{\mathrm{r}}'} \tag{4}$$

である．ここで

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}' S}{d} \tag{5}$$

であるから，これを式 4 の C に代入し G について解けば

$$G = \omega \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}'' S}{d} \tag{6}$$

を得る．図 1 の C と G が並列になった部分のアドミタンスは式 5 と式 6 から

$$\begin{aligned} G + \mathrm{j}\omega C &= \omega \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}'' S}{d} + \mathrm{j}\omega \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}' S}{d} && (7) \\ &= \omega \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_\mathrm{r}'' + \mathrm{j}\varepsilon_\mathrm{r}') S}{d} && (8) \\ &= \mathrm{j}\omega \frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r} S}{d} && (9) \end{aligned}$$

2.4 複素インピーダンスと複素比誘電率

図 1 の回路全体のインピーダンスは

$$\boldsymbol{Z} = \mathrm{j}\,\omega\,L + \frac{1}{G + \mathrm{j}\,\omega\,C} \tag{10}$$

$G + \mathrm{j}\omega C$ に式 9 を代入して整理すると

$$\boldsymbol{Z} = \mathrm{j}(\omega\,L - \frac{d}{\omega \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r}\,S}) \tag{11}$$

これを $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{r}$ について解いて実部と虚部に分離すれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{r} &= \frac{d}{\omega \varepsilon_0 S} \frac{1}{(\omega L + \mathrm{j}\boldsymbol{Z})} && (12) \\ \varepsilon_\mathrm{r}' &= \frac{d}{\omega \varepsilon_0 S} \frac{\omega L - \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{(\omega L - \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}))^2 + \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})^2} && (13) \\ \varepsilon_\mathrm{r}'' &= \frac{d}{\omega \varepsilon_0 S} \frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{(\omega L - \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}))^2 + \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})^2} && (14) \end{aligned}$$

となる．

2.5 等価直列インダクタンス L の抽出

共振角周波数付近での $\boldsymbol{Z}$ の振る舞いから図 1 の L を求める．

■共振角周波数 ω_0　$\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}) = 0$ となる角周波数 ω_0 を求める．式 10 の虚数部を 0, ω を ω_0 とし，ω_0 について解けば

$$0 = \omega_0 L - \frac{\omega_0 C}{G^2 + \omega_0^2 C^2} \tag{15}$$

$$\omega_0 = \pm \frac{\sqrt{\frac{C}{L} - G^2}}{C} \tag{16}$$

を得る．

■ω_0 における $\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})$　式 10 の実数部を取り出し

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}) = \frac{G}{G^2 + \omega^2\,C^2} \tag{17}$$

ω に式 16 の ω_0 を代入して整理すれば

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}) = \frac{GL}{C} \tag{18}$$

を得る．

■ω_0 における $\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})$ の微係数　式 10 の実数部を ω で微分し

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega} = -\frac{2\,\omega\,C^2\,G}{(G^2 + \omega^2\,C^2)^2} \tag{19}$$

この ω に式 16 の ω_0 を代入して整理すれば

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega} = -\frac{2\,G\,\sqrt{\frac{C}{L} - G^2}\,L^2}{C} \tag{20}$$

を得る．

■ω_0 における $\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})$ の微係数　式 10 の虚数部を ω で微分し，

$$\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega} = L - \frac{C}{G^2 + \omega^2\,C^2} + \frac{2\,\omega^2\,C^3}{(G^2 + \omega^2\,C^2)^2} \tag{21}$$

ω に式 16 の ω_0 を代入して整理すれば

$$\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega} = \frac{2\left(\frac{C}{L} - G^2\right)\,L^2}{C} \tag{22}$$

を得る．

■L の導出　式 18, 式 20, 式 22 から L を導出する．式 18 を G について解いて

$$G = \frac{\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}) C}{L} \tag{23}$$

を得る．式 22 の G に式 23 を代入し，C について解けば

$$\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega} = 2L - 2(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}))^2 C \tag{24}$$

$$C = \frac{2L - \frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}}{2\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})^2} \tag{25}$$

を得る．式 20 の G に式 23 を代入し，両辺を二乗すれば

$$(\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})^2 = 4(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}))^2 CL - 4(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}))^4 C^2$$

を得，この C に式 25 を代入し，

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})^2 \\
&= 2L(2L-(\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}))-(2L-(\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}))^2 \\
&= 2(\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})L-(\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})^2
\end{aligned}
$$

L について解けば

$$
L=\frac{(\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})^2+(\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega})^2}{2\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}} \tag{26}
$$

L を得る．

これを式 12 の L に代入すれば，複素インピーダンスから複素誘電率が得られる．

3　抽出例

3.1　測定

表 1 の SK00C500M10A6 の複素インピーダンスを Agilent 社 16196A/B/C/D 平行電極 SMD テストフィクスチャ [4] を使用して 3GHz まで測定した．単板コンデンサは 7mm 同軸線路の中心導体に直列に挿入され，正常に誤差補正がなされている．

予想される比誘電率は 16000 と非常に大きく漏れ電界を無視することができるが，式 1 で予想される周波数は 3.7GHz でありこれ以上高い周波数範囲では前述の考察は適用できない．

図 2 に測定した複素インピーダンスを示す．3GHz よりやや低い周波数に容量法による測定の誤差要因となる共振周波数がある．また低い周波数の測定に問題があることが判る．[*1] このような明らかに問題のある測定値は複素比誘電率の抽出に使用しないよう取り除いた．

3.2　複素比誘電率 ε_r の抽出と近似式の例

共振周波数付近の二つの周波数で複素インピーダンスを測定すれば，線形補間法で式 26 の右辺の各項を得，L を抽出することができる．表 2 にその例を示す．

[*1] 図 5 に同じデータを示しているが，この現象は図 2 でしか見つけることができない．測定であれ解析であれ，特定の表示形式だけでルーチンワーク的にまとめるのでなく，様々な形式や目盛でプロットしてこそ問題点を発見できる．

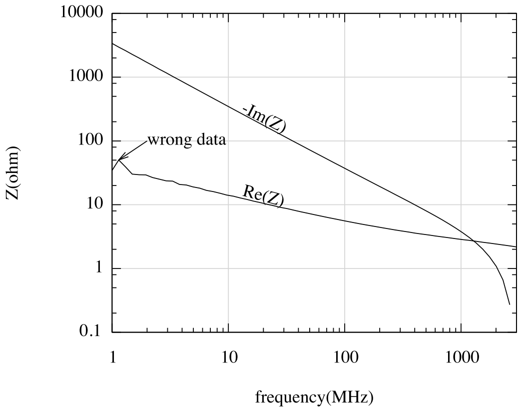

図 2　測定した複素インピーダンス

表 2　L の抽出

第一の測定点	f_1	2625.24	MHz
	$\mathrm{Re}(Z_1)$	2.26	Ω
	$\mathrm{Im}(Z_1)$	-0.27	Ω
第二の測定点	f_2	3000.00	MHz
	$\mathrm{Re}(Z_2)$	2.18	Ω
	$\mathrm{Im}(Z_2)$	0.10	Ω
	$\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})$	2.20	Ω
	$\frac{\partial \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}$	-34.07	p Ω rad/sec
	$\frac{\partial \mathrm{Im}(\boldsymbol{Z})}{\partial \omega}$	154.5	p Ω rad/sec
インダクタンス	L	81.0	pH

続いて式 12 により各測定周波数の複素比誘電率を抽出し，その近似式を導出する．ここでは次の式を近似式として使用した．

$$
\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{r}{}^*(\omega)=\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}+\frac{(\varepsilon_{\mathrm{r}^0}-\varepsilon_{\mathrm{r}\infty})}{1+(\mathrm{j}\omega\tau_0)^{1-\alpha}} \tag{27}
$$

ここに τ_0 は ε_r'' が最大となる角周波数 ω_{0d} の逆数，$\varepsilon_{\mathrm{r}^0}$ は ω_{0d} より十分低い周波数での ε_r'，$\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ は ω_{0d} より十分高い周波数での ε_r'，α は $0\sim1$ の間を取る係数で，ω_{0d} における ε_r'' を決定づける．[*2]

ここでの測定データは $\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ を明確にするために

[*2] この式は “Cole-Cole の円弧則” と呼ばれる．他にも多くの厳密なあるいは簡略な理論式がある [5]．適切な理論式は誘電体の組成や測定範囲や目的に応じて選択すること．

表 3 Cole-Cole の円弧則のパラメータ

$\varepsilon_{\mathrm{r}^0}$	12766
τ_0	9.048×10^{-11}
$\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$	-2972
α	0.31

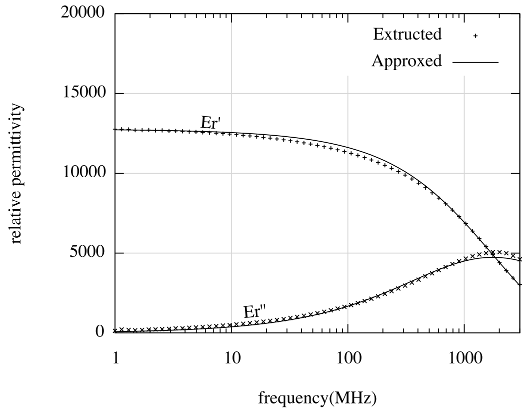

図 3 抽出した複素比誘電率とその近似値

は不十分なので，ω_{0d} において $\varepsilon'_{\mathrm{r}} = \varepsilon_{\mathrm{r}\infty} + (\varepsilon_{\mathrm{r}^0} - \varepsilon_{\mathrm{r}\infty})/2$ となるよう $\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ を決めた．[*3] こうして決定した表 3 のパラメータを式 27 に与えると図 3 のように抽出した複素比誘電率に対して良い近似が得られた．

4 電磁界解析モデルへの利用

複素比誘電率の周波数依存性が明らかになれば，それを Sonnet の電磁界解析モデルに反映させることができる．

Sonnet の電磁界解析モデルに与える数値データのほとんどは，定数だけでなく，変数や初等関数[*4]で定義することができ，さらにその関数の引数として別の変数や解析周波数を使うことができる．従って，図 3 のグラフを，解析周波数を引数とする関数で定義し，その関数を Sonnet の dielectric layer[*5] の ε_{r} と $\tan\delta$ に指定すれば良い．

この関数として二つの方法が考えられる．

数値データを格納したファイルを参照する折れ線近似関数 折れ線近似関数が Sonnet に最初から用意されている．被参照ファイルへの数値データの格納や指定に多少の情報工学の知識が必要である．

初等関数を使った近似関数 滑らかで自然な関数が得られる．良い近似を実現する関数を選択しパラメータを導出する過程には材料組成や多少の数学的知識が必要である．

以下では第一の方法を中心に，第二の方法もあわせて操作を解説する．

4.1 被参照ファイルをつくる

被参照ファイルには csv 形式で数値データを格納する．[*6]ここではファイル名を "extructed_er_table.csv" とする．表 4 は図 3 から読み取って作った csv ファイルの例である．このファイルを作る上で幾つか注意がある．[*7]

- 一行目は "," で始まり，$1, 2, 3 \ldots$ と続く．
- 二行目以後は (Hz) 単位の周波数で始まり，"," で区切って $\varepsilon'_{\mathrm{r}}$ と $\varepsilon''_{\mathrm{r}}$ が続く
- 二行目に極端に低い周波数，最終行に極端に高い周波数のデータを推測して与えておく

上記 3 番目の注意点に従って表 4 には周波数 10^3Hz と 3×10^9Hz の値が記入されている．この数値は完全に推測に過ぎないが，この値を与えておけば，

[*3] $\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ は正で無ければならない．しかしこの例では図 3 のように良い近似が得られている．$\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ を決定づけるためには ω_0 より高い周波数領域の測定データが必要だが，この例ではそれが不十分なために負の $\varepsilon_{\mathrm{r}\infty}$ になってしまったのだろう．

[*4] 三角関数や指数対数関数，複素数も取り扱うことができる．

[*5] Sonnet では dielectric layer(誘電体層) と表現しているが，そのパラメータには複素比誘電率と複素比透磁率の両方が指定できる．つまり Sonnet の dielectric layer は誘電体と磁性体を区別していない．

[*6] csv ファイルは，シミュレータだけでなくあらゆるデータ処理プログラムで汎用的に使われるファイル形式である．csv ファイルについてよくわからない場合は，身の回りのコンピュータに詳しい人に助けを求めとよい．

[*7] csv ファイルは，OK ボタンを押したり，クリックしたりしているだけではできない場合が多い．ディレクトリ，テキストファイル，エディタ，文字コード，改行コード，などの概念なしに csv ファイルを正しく生成するのは難しいかもしれない．それらついてよくわからない場合は，身の回りのコンピュータに詳しい人に助けを求めとよい．

表 4　csv ファイル

,	1,	2
1.00e3,	12766,	130
1.00e6,	12766,	130
1.14e6,	12761,	217
1.31e6,	12747,	191
:	:	:
2297.30e6,	3898,	4991
2625.24e6,	3437,	4838
3000.00e6,	3032,	4613
3000.00e9,	3032	,4613

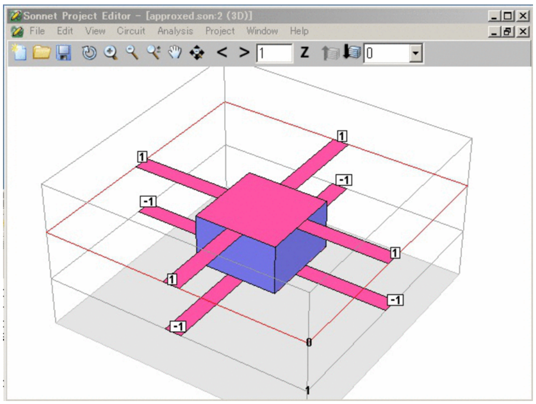

図 4　解析モデルの概観

測定範囲外の周波数に対しても安定な結果が得られる.[*8]

4.2　Sonnet のモデルを準備する

Sonnet のモデルから上記の "extructed_er_table.csv" ファイルを呼び出すにはあらかじめ Sonnet のモデルを準備しておく.

1. 電磁界解析モデルを準備する (図 4).
2. そのファイルと同じフォルダに上の "extructed_er.csv" を置いておく.

4.3　被参照ファイルを呼び出す関数を定義する

1. Xgeom でモデルファイルを開く
2. Circuit-Variable List...でダイアログボックスを開く
3. New...でさらに新しいダイアログボックスを開く
4. Name に例えば `ReEr` と入力する
5. Value or Equation に `table2("extructed_er_table.csv",freq,1)`[*9] と入力する[*10]
6. OK でダイアログボックスを閉じる
7. 同様に表 5 に示す各関数を定義する.
8. OK でさらにダイアログボックスを閉じる

表 5　折れ線近似関数定義

`ReEr`	`table2("extructed_er_table.csv", freq,1)`
`ImEr`	`table2("extructed_er_table.csv", freq,2)`
`MagEr`	`sqrt(ReEr^2+ImEr^2)`
`tand`	`ImEr/ReEr`

4.4　初等関数を使った近似関数の場合

被参照ファイルの生成は必要ない. 式 27 と表 3 を再現するべく表 6 のように関数を定義すればよい.

4.5　誘電体のパラメータに指定する

以上に定義した `MagEr` と `tand` を電磁界解析モデルの誘電体のパラメータに指定する.

1. Circuit-Brick Materials...でダイアログボックスを開く[*11]

[*8] もちろん正しい結果である保証はないが, "0 で除して発散" といった現象は避けられる.

[*9] `table2` は csv ファイルの内容を呼び出す Sonnet の関数である. この例では "extructed_er_table.csv" ファイルを呼び出して, freq に対応する行の第 1 のカラムの数値を呼び出す. freq の単位は Hz で, 対応する freq が存在しない場合は線形補間される. 補外はなされない. 詳細は Sonnet の online help を参照されたい. (manual には記載されていない.)

[*10] もしうまくいっていれば Evaluates to に数値が表示される. そうでなければ `Can't read extructed_er_table.csv` とエラーが現れる.

[*11] もちろん Brick Materials... でなく Circuite Dielectric Layers... に指定することもできる.

表 6　初等関数を使った近似関数定義

er0	12766
eri	-2972
f0	1.759e9
alpha	0.31
ReEr	real(eri+(er0-eri) /(1+(sqrt(-1)*freq/f0)^(1-alpha)))
ImEr	-imag(eri+(er0-eri) /(1+(sqrt(-1)*freq/f0)^(1-alpha)))
MagEr	sqrt(ReEr^2+ImEr^2)
tand	ImEr/ReEr

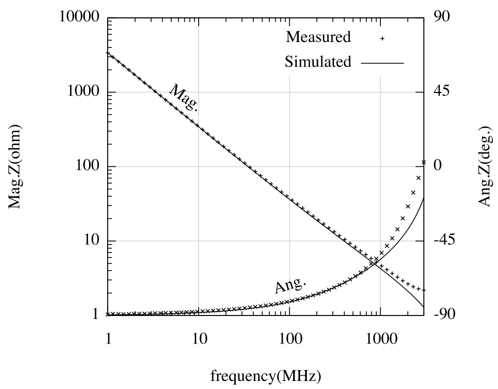

図 5　測定結果と電磁界解析結果

2. 比誘電率を指定したい誘電体層をダブルクリックしてさらにダイアログボックスを開く
3. Erel に `MagEr` を，Dielectric Loss Tan に `tand` を指定する．(図 6)
4. OK でダイアログボックスを閉じる

4.6　解析結果の例

図 4 に解析モデルの概観を，図 5 に表 6 のように定義した周波数依存誘電率を使った解析結果を示す．

5　むすび

高誘電率セラミック単板コンデンサの複素インピーダンスを容量法で 3GHz まで測定し，測定した複素インピーダンスから高誘電率セラミック単板コンデンサに使用された誘電体の複素比誘電率の周波数依存性を抽出し，その近似式を導出する過程を解説した．さらにその実例を示しながら複素比誘電率の周波数依存性を電磁界シミュレータ Sonnet の電磁界解析モデルに反映させる手順を詳細に解説した．

今後の課題として 3GHz を超える周波数領域の複素比誘電率の周波数依存性の導出が期待されるが，それには測定周波数領域で実効波長より小さな単板コンデンサと材料組成についての知見に基づく複素比誘電率の周波数依存性についての理論的考察が必要であり，単純なルーチンワークでは解決できないことを了解されたい．

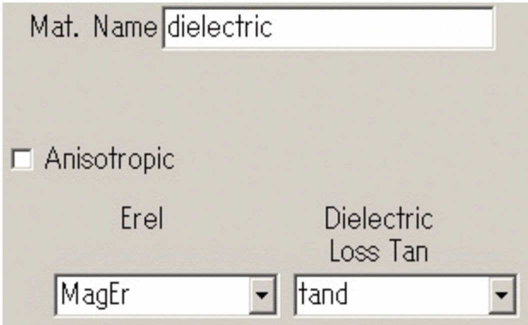

図 6　誘電体定義の例

参考文献

[1] 戸高嘉彦，小林禧夫，“マイクロ波帯における基板材料の複素誘電率測定法，”電気学会研究会資料. DEI, 誘電・絶縁材料研究会，vol.2006, no.77，pp.1–6，2006-12-18.

[2] テクダイヤ社，“高周波・光デバイス用セラミック製品”．http://www.tecdia.com/jp/

[3] 村田製作所（編），セラミックコンデンサの基礎と応用，オーム社，2003.

[4] Agilent Technologies, “Agilent 16196A/B/C/D 平行電極 SMD テスト・フィクスチャ オペレーション / サービス・マニュアル第 4 版，” 2007-08-29.

[5] 家田正之，“誘電体・絶縁体の電気物性，” 電気・

電子材料ハンドブック，pp.8–12，1987.

謝辞

表 1 に示すサンプルおよび，図 2 と図 5 に示す測定データはテクダイヤ株式会社 [2] の本多様からご提供いただきました．